Valószínűségszámítás

Permutáció	$P_n = n!$	Ismétléses perm.	$P_n^{k_1,k_2,\ldots,k_l} = \frac{n!}{k_1!k_2!\ldots k_l!}$
Variáció	$V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$	Ismétléses var.	$V_n^{k,i} = n^k$
Kombináció	$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$	Ismétléses komb.	$C_n^{k,i} = \binom{n+k-1}{k}$

Valószínűségi változók jellemzői

Eloszlásfüggvény $F(x) = P(\xi < x)$ $\qquad F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt$

Sűrűségfüggvény $f(x) = F'(x)$

$$P(a \le \xi < b) = F(b) - F(a) = \int\limits_a^b f(x)dx$$

Várható érték $M(\xi) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i p_i$ (diszkrét) $\qquad M(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx$ (folytonos)

Szórásnégyzet $D^2(\xi) = M\left[(\xi - M(\xi))^2\right]$

$$D^2(\xi) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i p_i\right)^2 \quad \text{(diszkrét)}$$

$$D^2(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx\right)^2 \quad \text{(folytonos)}$$

Nevezetes eloszlások

Binomiális $P(\xi = k) = p_k = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$, $k = 0,1,2,\ldots,n$

$M(\xi) = np$ $\qquad D(\xi) = \sqrt{npq}$

Egyenletes $f(x) = \frac{1}{b-a}$ ha $a < x \le b$

$F(x) = \frac{x-a}{b-a}$ ha $a < x \le b$

$M(\xi) = \frac{a+b}{2}$ $\qquad D(\xi) = \frac{b-a}{\sqrt{12}}$

Exponenciális $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ ha $x > 0$

$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ ha $x > 0$

$M(\xi) = \frac{1}{\lambda}$ $\qquad D(\xi) = \frac{1}{\lambda}$

Normális ($N(m,\sigma)$) $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$

$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}} dt$

$M(\xi) = m$ $\qquad D(\xi) = \sigma$

$N(0,1)$: $F(x) = \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)$ $\qquad \Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$

$f(x) = \frac{1}{\sigma}\varphi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)$ $\qquad \varphi(-x) = \varphi(x)$

Csebisev egyenlőtlenség

$$P\left(|\xi - M(\xi)| \ge \varepsilon\right) \le \frac{D^2(\xi)}{\varepsilon^2} \text{ vagy } P\left(|\xi - M(\xi)| > \lambda D(\xi)\right) < \frac{1}{\lambda^2}$$

Numerikus módszerek

Iterációs módszerek konvergencia-sebessége:

k-ad rendű: $|\xi - x_{n+1}| \le K_0 |\xi - x_n|^k$ $\qquad$ vagy: $|\xi - x_{n+1}| \le K_0 |x_{n+1} - x_n|^k$

$n = 1,2,\ldots$; $k = 1,2,\ldots$; $\qquad$ ξ a keresett érték, $x_n \to \xi$;

n-edrendű Taylor-közelítés, $\quad f(x_1) \approx T_{n,x_0}(x_1)$

a közelítés hibakorlátja: $\quad |f(x_1) - T_{n,x_0}(x_1)| \le K_{n+1} \frac{|x_1 - x_0|^{n+1}}{(n+1)!}$

$|f^{(n+1)}(x)| \le K_{n+1}$

minden x-re, amely x_0 és x_1 között van;

Lagrange-interpoláció

Egyváltozós függvényre: $\quad l_i(x) = \prod\limits_{j=1, j\ne i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$, $g(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i) l_i(x)$

az interpoláció hibakorlátja: $\quad |f(\xi) - g(\xi)| \le \frac{K_n}{n!} \prod\limits_{j=1}^{n} |\xi - x_j|$;

$\left|f^{(n)}(x)\right| \le K_n$ minden $x \in [a,b]$;

Kétváltozós függvényre: $\quad g(x,y) = \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{k=1}^{m} f(x_i, y_k) l_i(x) l_k(y)$;

Regressziószámítás: lineráris regresszió a legkisebb négyzetek módszerével

regressziós egyenes:

$$y = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2}(x - \bar{x}) + \bar{y} \quad \text{vagy } y = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}(x - \bar{x}) + \bar{y}$$

ahol $\bar{x} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i}{n}$, $\bar{y} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} y_i}{n}$.

Nemlineáris egyenlet közelítő megoldása:

Newton módszer (érintő módszer): $\quad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, $n = 1,2,\ldots$

hibakorlát: $|x_{n+1} - \xi| \le \frac{M}{2m} |x_{n+1} - x_n|^2$,

ahol $0 < m \le |f'(x)|$ minden $x \in [a,b]$ $\qquad M \ge |f''(x)|$ minden $x \in [a,b]$;

Húrmódszer: $\quad x_1^{(1)} = a, x_2^{(1)} = b$, $f(a)f(b) < 0$

$$\bar{x}^{(n)} = x_1^{(n)} - \frac{x_2^{(n)} - x_1^{(n)}}{f(x_2^{(n)}) - f(x_1^{(n)})} f(x_1^{(n)}), \qquad n = 1,2,\ldots$$

és ha $f(\bar{x}^{(n)}) f(x_2^{(n)}) < 0$, $\quad$ akkor legyen $x_1^{(n+1)} = \bar{x}^{(n)}$ és $x_2^{(n+1)} = x_2^{(n)}$

ha $f(\bar{x}^{(n)}) f(x_2^{(n)}) > 0$, $\quad$ akkor legyen $x_1^{(n+1)} = x_1^{(n)}$ és $x_2^{(n+1)} = \bar{x}^{(n)}$

ha $f(\bar{x}^{(n)}) = 0$, $\quad$ akkor $\xi = \bar{x}^{(n)}$ és vége;

Nemlineáris egyenletrendszer megoldása Newton módszerrel:

$$f(x_n, y_n) + f'_x(x_n, y_n)(x_{n+1} - x_n) + f'_y(x_n, y_n)(y_{n+1} - y_n) = 0$$

$$g(x_n, y_n) + g'_x(x_n, y_n)(x_{n+1} - x_n) + g'_y(x_n, y_n)(y_{n+1} - y_n) = 0$$

egyenletrendszerből (x_{n+1}, y_{n+1}) kifejezése $n = 1,2,\ldots$

Az integrálszámítás alkalmazásai

Folytonos ívgörbe hossza	$s=\int\limits_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$	$s=\int\limits_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left[\dot\varphi(t)\right]^2+\left[\dot\psi(t)\right]^2}\,dt$
Forgástest térfogata	$V=\pi\int\limits_a^b f^2(x)\,dx$	$V=\pi\int\limits_{t_1}^{t_2} \psi^2(t)\dot\varphi(t)\,dt$
Forgástest felszíne	$A=2\pi\int\limits_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$	$A=2\pi\int\limits_{t_1}^{t_2} \psi(t)\sqrt{\left[\dot\varphi(t)\right]^2+\left[\dot\psi(t)\right]^2}\,dt$
$y=f(x)$ görbe súlypontjának koordinátái	$x_s^g=\dfrac{S_y^g}{s}=\dfrac{\int\limits_a^b x\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx}{\int\limits_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx}$	$y_s^g=\dfrac{S_x^g}{s}=\dfrac{\int\limits_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx}{\int\limits_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx}$
Síklemez súlypontjának koordinátái	$x_s^l=\dfrac{S_y^l}{T}=\dfrac{\int\limits_a^b x f(x)\,dx}{\int\limits_a^b f(x)\,dx}$	$y_s^l=\dfrac{S_x^l}{T}=\dfrac{\frac{1}{2}\int\limits_a^b f^2(x)\,dx}{\int\limits_a^b f(x)\,dx}$
Pappus-Guldin tételei	$A=2\pi y_s^g\cdot s$	$V=2\pi y_s^l\cdot T$
Forgástest súlypontjának koordinátái	$x_s^t=\dfrac{S_{yz}^t}{V}=\dfrac{\pi\int\limits_a^b x f^2(x)\,dx}{\pi\int\limits_a^b f^2(x)\,dx}$	$y_s^t=z_s^t=0$
Forgásfelület súlypontjának koordinátái	$x_s^f=\dfrac{\int\limits_a^b x f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx}{\int\limits_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx}$	$y_s^f=z_s^f=0$
$f\geq 0$ függvény görbéje alatti homogén síklemez inerciája	$I_x^l=\dfrac{1}{3}\int\limits_a^b f^3(x)\,dx$	$I_y^l=\int\limits_a^b x^2 f(x)\,dx$
Függvény görbéje által adott homogén vonaldarab inerciája	$I_x^g=\int\limits_a^b f^2(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$	$I_y^g=\int\limits_a^b x^2\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$
Homogén forgástest inerciája a forgástengelyre	$I_x^t=\dfrac{\pi}{2}\int\limits_a^b f^4(x)\,dx$	

Trapézformula részintervallumok száma n	$\int\limits_a^b f(x)\,dx\approx\dfrac{b-a}{n}\left[\dfrac{1}{2}f(x_0)+f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_{n-1})+\dfrac{1}{2}f(x_n)\right]$
Simpson-formula részintervallumok száma $2n$	$\int\limits_a^b f(x)\,dx\approx\dfrac{b-a}{6n}\left[f(x_0)+4f(x_1)+2f(x_2)+4f(x_3)+\cdots+2f(x_{2n-2})+4f(x_{2n-1})+f(x_{2n})\right]$

A differenciálszámítás alkalmazásai

Taylor polinom: $$T_{n,x_0}(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

Lagrange maradéktag: $H_{n,x_0}(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$, ξ egy x és x_0 közötti érték $\quad f(x)=T_{n,x_0}(x)+H_{n,x_0}(x)$

Simulókör (u,v,r) Görbület (g)

$$u=x_0-f'(x_0)\frac{1+[f'(x_0)]^2}{f''(x_0)}\qquad v=f(x_0)+\frac{1+[f'(x_0)]^2}{f''(x_0)}$$

$$r=\frac{\left(1+[f'(x_0)]^2\right)^{\frac{3}{2}}}{|f''(x_0)|}\qquad g=\frac{1}{r}$$