ALAPINTEGRÁLOK ÉS A HATÁROZATLAN INTEGRÁL NÉHÁNY TULAJDONSÁGA

$$\int c\,dx = cx + C, \quad c \in \mathbf{R}$$

$$\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \qquad \alpha \in \mathbf{R} \setminus \{-1\}$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\operatorname{ctg} x + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \operatorname{tg} x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \operatorname{arc}\,\sin x + C$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arc}\,\operatorname{tg} x + C$$

$$\int \operatorname{sh} x\,dx = \operatorname{ch} x + C$$

$$\int \operatorname{ch} x\,dx = \operatorname{sh} x + C$$

$$\int \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}\,dx = -\operatorname{cth} x + C$$

$$\int \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}\,dx = \operatorname{th} x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \operatorname{ar}\,\operatorname{sh} x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx = \operatorname{ar}\,\operatorname{ch} x + C, \qquad x > 1$$

$$\int \frac{1}{1-x^2}\,dx = \left.\begin{cases} ar\,\operatorname{th} x + C, & ha \quad |x| < 1 \\ ar\,\operatorname{cth} x + C, & ha \quad |x| > 1 \end{cases}\right\}$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

$$\int c\,f = c\int f \qquad \int (f+g) = \int f + \int g \qquad \int (f-g) = \int f - \int g$$

Néhány fontos integráltípus

$$\int f(ax+b)\,dx = \frac{F(ax+b)}{a} + C,$$

$$\int f^{\alpha}(x)\; f'(x)\,dx = \frac{f^{\alpha+1}(x)}{\alpha+1} + C. \qquad \alpha \neq -1$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + C.$$

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = F(g(x)) + C$$

$$\int f(x)\,dx = \int f(g(t))g'(t)\,dt\,\Big|_{t=\bar{g}(x)}$$

$$\int uv' = uv - \int u'v$$

$$\int \frac{A}{(x-a)}\,dx = A\int \frac{1}{(x-a)}\,dx = A\ln|x-a| + C.$$

$$\int \frac{A}{(x-a)^n}\,dx = A\int (x-a)^{-n}\,dx = \frac{A}{1-n}(x-a)^{1-n} + C =$$

$$= \frac{A}{(1-n)(x-a)^{n-1}} + C \qquad (n \neq 1).$$

Gyökös integrálok

$\int \sqrt{1-x^2}\;dx$	$x = \sin t$ vagy az $x = \cos t$ helyettesítés
$\int \sqrt{1+x^2}\;dx$	$x = \operatorname{sh} t$ helyettesítés
$\int \sqrt{x^2-1}\,dx$	$x = \operatorname{ch} t$ helyettesítés

$$\int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx \qquad \text{visszavezethető} \int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt, \quad \int \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\,dt, \quad \int \frac{1}{\sqrt{t^2-1}}\,dt,$$

Integrálásnál gyakran használt trigonometrikus és hiperbolikus azonosságok:

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} \qquad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

$$\mathrm{sh}^2 x = \frac{\mathrm{ch2x} - 1}{2} \qquad \mathrm{ch}^2 x = \frac{\mathrm{ch2x}+1}{2} \qquad \mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1$$

$$\mathrm{sh2x} = 2\,\mathrm{shx}\,\mathrm{chx} \qquad \mathrm{ch2x} = \mathrm{ch}^2 x + \mathrm{sh}^2 \mathrm{x}$$

A trigonometrikus függvények racionális függvényének integrálása $t = \mathrm{tg}\frac{x}{2}$ helyettesítéssel.

$x = 2\,\mathrm{arc\,tg}\,t$, így $dx = \dfrac{2}{1+t^2}dt$, és

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad \mathrm{tg}x = \frac{2t}{1-t^2}, \qquad \mathrm{ctg}\,x = \frac{1-t^2}{2t}.$$

f ≥0 függvény görbéje alatti terület:

$$\mathrm{T} = \int_a^b f(x)\,dx, \qquad \left.\begin{aligned} x &= \varphi(t) \\ y &= \psi(t) \end{aligned}\right\} t \in [\alpha, \beta], \quad T = \int_\alpha^\beta \psi(t)\dot{\varphi}(t)dt.$$

Zárt görbe által határolt terület:

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi(t) \\ y &= \psi(t) \end{aligned}\right\} t \in [\alpha, \beta], \qquad T = -\int_\alpha^\beta \psi(t)\dot{\varphi}(t)\,dt. \qquad T = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \left[\varphi(t)\dot{\psi}(t) - \psi(t)\dot{\varphi}(t)\right] dt.$$

$$r = r(\varphi) \qquad T = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r^2(\varphi)\,d\varphi.$$

Folytonos ívgörbe hossza $\quad s = \displaystyle\int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx. \qquad s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{[\dot{\varphi}(t)]^2 + [\dot{\psi}(t)]^2}\,dt,$

Forgástest térfogata $\quad V = \pi\displaystyle\int_a^b f^2(x)\,dx \qquad V = \pi\int_{t_1}^{t_2} \psi^2(t)\dot{\varphi}(t)\,dt,$

Forgástest felszíne $\quad F = 2\pi\displaystyle\int_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx \qquad F = 2\pi\int_{t_1}^{t_2} \psi(t)\sqrt{[\dot{\varphi}(t)]^2 + [\dot{\psi}(t)]^2}\,dt.$

$y = f(x)$ görbe $S(x_s; y_s)$ súlypontjai

$$x_s = \frac{S_y}{s} = \frac{\int_a^b x\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx}{\int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx} \qquad y_s = \frac{S_x}{s} = \frac{\int_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx}{\int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx}.$$

Síklemez $S(x_S;y_S)$ súlypontjának koordinátái

$$x_s=\frac{\mathrm{S_y}}{\mathrm{T}}=\frac{\int_a^b xf(x)dx}{\int_a^b f(x)dx}\quad y_s=\frac{\mathrm{S_x}}{\mathrm{T}}=\frac{\frac{1}{2}\int_a^b f^2(x)dx}{\int_a^b f(x)dx}$$

Forgástest $(x_S;y_S;z_S)$ súlypontjának koordinátái

$$x_s=\frac{\mathrm{S_{yz}}}{\mathrm{V}}=\frac{\int_a^b xf^2(x)dx}{\int_a^b f^2(x)dx},\ y_s=0,\ z_s=0.$$

Felület súlypontja

$$x_S=\frac{\int_a^b xf(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx}{\int_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx},y_S=0,z_S=0.$$

f≥0 függvény görbéje alatti terület inerciája

$$\mathrm{I_x}=\frac{1}{3}\int_a^b f^3(x)\,dx\qquad \mathrm{I_y}=\int x^2 f(x)\,dx$$

Homogén forgástest inerciája a forgástengelyre

$$\mathrm{I_x}=\frac{\pi}{2}\int_a^b f^4(x)dx$$

Függvény görbéje által adott homogén vonaldarab inerciája

$$\mathrm{I_x}=\int_a^b\sqrt{1+(f^i(x))^2}\,f^2(x)\,dx\quad \mathrm{I_y}=\int_a^b x^2\sqrt{1+(f^i(x))^2}\,dx$$

Trapézformula

$$\int_a^b f\approx\frac{b-a}{n}\left[\frac{1}{2}f(x_0)+f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_{n-1})+\frac{1}{2}f(x_n)\right].$$

Simpson-formula $\int_a^b f\approx\frac{b-a}{6n}[f(x_0)+4f(x_1)+2f(x_2)+4f(x_3)+\ldots+2f(x_{2n-2})+4f(x_{2n-1})+f(x_{2n})].$